Periodischer und abbrechender Dezimalbruch

Ein Bruch ist eine Art, eine Dezimalzahl darzustellen. Eine Dezimalzahl kann nach einigen Nachkommastellen abbrechen, aber auch unendlich lang sein. So gibt es auch verschiedene Arten von Brüchen, nämlich ein abbrechender Dezimalbruch und periodische Dezimalbrüche. Die beiden Dezimalbrüche werden im Folgenden genauer erläutert.

Abbrechender Dezimalbruch Definition

Was ist ein abbrechender Dezimalbruch? Ein abbrechender Dezimalbruch ist ein Bruch, der nur endlich viele Nachkommastellen hat. Die Nachkommastellen dieses Bruches sind also mit einer bestimmten Zahl begrenzt.

Ist ein abbrechender Dezimalbruch vollständig gekürzt, so stehen im Nenner als Faktoren nur 2 und 5. Die Faktoren der Zahl im Nenner können mit der Primfaktorzerlegung berechnet werden, die weiter unten erklärt wird. Analog ist ein abbrechender Dezimalbruch auch daran erkennbar, dass der Nenner durch Erweitern bzw. Kürzen auf 100 gebracht werden kann.

Abbrechender Dezimalbruch Beispiel:

$$\frac{13}{40} = \frac{13}{5\cdot 2\cdot 2\cdot 2} = 0,325$$

Der Nenner besteht nach der Primfaktorzerlegung nur aus den Faktoren 5 und 2. Deshalb muss ein abbrechender Dezimalbruch vorliegen.

$$\frac{3}{25} = \frac{3\cdot 4}{25\cdot 4} = \frac{12}{100} = 0,12$$

Der Bruch kann mit $\frac{4}{4}$ multipliziert werden, sodass der Nenner auf 100 erweitert wird. Daher liegt auch hier ein abbrechender Dezimalbruch vor.

Periodische Dezimalbrüche

Ein periodischer Dezimalbruch ist ein nicht abbrechender Dezimalbruch. Die Nachkommastellen dieses Bruches sind also nicht durch eine bestimmte Zahl begrenzt, sondern unendlich fortlaufend mit Wiederholungen. Um dies darzustellen, wird über die sich wiederholende Zahlenfolge ein "Periodenstrich" geschrieben.

Bei einem periodischen Dezimalbruch können im Nenner alle Zahlen stehen, also nicht nur die Faktoren 2 und 5.

Periodischer Dezimalbruch Beispiel:

$$\frac{1}{3} = 0,\overline{33}$$

Hier steht im Nenner nur die Zahl 3. Da diese nicht als Faktor der Zahlen 2 und 5 geschrieben werden kann, liegt hier ein nicht abbrechender Dezimalbruch, also ein periodischer

$$\frac{5}{24} = \frac{5}{3\cdot 2\cdot 2\cdot 2} = 0,208\overline{33}$$

Nach der Primfaktorzerlegung ist zu erkennen, dass 2 und 3 als Faktoren im Nenner stehen. Eigentlich ist eine 2 als Faktor im Nenner ein Hinweis dafür, dass ein abbrechender

Dezimalbruch vor.

Dezimalbruch vorliegt. Jedoch ist die Regel, dass sobald ein anderer Faktor im Nenner alleine oder zusätzlich zu 2 und 5 steht, der Bruch periodisch sein muss (in diesem Beispiel war der Faktor die 3).

Primfaktorzerlegung Erklärung

Was ist eine Primfaktorzerlegung? Eine Primfaktorzerlegung ist die eindeutige Zerlegung einer Zahl in ein Produkt aus Primzahlen, die sogenannten Primfaktoren. Die Zerlegung kann wie folgt berechnet werden:

Zur Veranschaulichung wird die Berechnung an der Zahl 60 demonstriert.
Es wird beginnend bei der Zahl 2 der Reihe nach überprüft, durch welche Zahlen die zu zerlegende Zahl, in diesem Fall $60,$ geteilt werden kann. Offenbar ist 60 durch 2 teilbar und es gilt:

$$60 = 2 \cdot 30$$

Anschließend wird nun analog für den übrigen Faktor 30 vorgegangen. Dieser ist ebenfalls durch 2 teilbar:

$$60 = 2 \cdot 2 \cdot 15$$

Nun wird überprüft, durch was die Zahl 15 teilbar ist. Da 15 nicht durch 2 teilbar ist, wird die nächste natürliche Zahl überprüft, also die $3:$

$$60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$$

Die Zahl 5 ist selbst eine Primzahl und kann daher nicht mehr weiter zerlegt werden. Die eindeutige Primfaktorzerlegung von 60 ist also durch $60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$ gegeben.

Brüche umrechnen

Möchte man einen Bruch als Dezimalzahl schreiben, so muss unterschieden werden, ob ein abbrechender Dezimalbruch oder periodische Dezimalbrüche vorliegen. Abbrechende Brüche sind umgewandelt abbrechende Dezimalzahlen, periodische Brüche sind umgewandelt periodische Dezimalzahlen. Unendliche Dezimalzahlen, die nicht periodisch sind, lassen sich jedoch nicht als Bruch darstellen.

Abbrechende Dezimalbrüche

Soll ein abbrechender Dezimalbruch in eine Dezimalzahl umgewandelt werden, so muss der Bruch so erweitert bzw. gekürzt werden, dass im Nenner eine Zehnerpotenz steht, also $1, 10, 100, \ldots$ Da wie oben erwähnt jeder abbrechende Dezimalbruch so erweitert oder gekürzt werden kann, dass im Nenner 100 steht, ist dies immer möglich. Die Dezimalzahl ist dann gegeben durch die Zahl im Zähler mit so vielen Nachkommastellen, wie die Zehnerpotenz im Nenner Nullen hat.

Beispiel: Abbrechender Dezimalbruch $\longrightarrow$ Abbrechende Dezimalzahl

$$\frac{27}{20} = \frac{27 \cdot 5}{20 \cdot 5} = \frac{135}{100} = 1,35$$

Umgekehrt kann jede abbrechende Dezimalzahl als abbrechender Dezimalbruch geschrieben werden. Dafür muss die Zahl ohne Komma in den Zähler geschrieben werden. Die Zehnerpotenz mit der entsprechenden Anzahl Nullen, also der Anzahl der Nachkommastellen der Dezimalzahl, wird in den Nenner geschrieben.

Beispiel: Abbrechende Dezimalzahl $\longrightarrow$ Abbrechender Dezimalbruch

$$27,234 = \frac{27234}{1000}$$

Periodische Dezimalbrüche

Möchte man Brüche in periodische Dezimalzahlen umwandeln, so wird der Bruch als Quotient aufgefasst und berechnet. Gibt es eine Zahlenfolge, die sich immer wiederholt, so ist dies die Periode.

Beispiel: Periodischer Dezimalbruch $\longrightarrow$ Periodische Dezimalzahl

Der Bruch $\frac{7}{11}$ soll in eine Dezimalzahl umgewandelt werden:

$$7 : 11 = 0,636363... = 0,\overline{63}$$

Möchte man sofort-periodische Dezimalzahlen in Brüche umwandeln, so wird wie folgt vorgegangen: Zunächst wird die Zahl vor dem Komma durch 0 ersetzt. Der periodische Bruch zu dieser Zahl ergibt sich dann, indem die Periode in den Zähler und so viele 9-er in den Nenner geschrieben werden, wie die Periode Ziffern hat. Steht eine andere Zahl als 0 vor dem Komma, so wird diese anschließend zu dem erhaltenten Bruch addiert.

Beispiel: Periodische Dezimalzahl $\longrightarrow$ Periodischer Dezimalbruch

Die sofort-periodische Dezimalzahl $1,\overline{3}$ soll in einen Dezimalbruch umgewandelt werden. Die Periode ist 3 und hat die Länge $1.$ Es gilt also zuächst für die Dezimalzahl $0,\overline{3}$:

$$0,\overline{3} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

Nun muss noch die Zahl vor dem Komma, also $1,$ addiert werden:

$$1,\overline{3} = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$