Maximaler Flächeninhalt

Einführung

Bei Extremwertaufgaben mit Nebenbedingung benötigst du eine Zielfunktion, die du minimieren bzw. maximieren kannst.

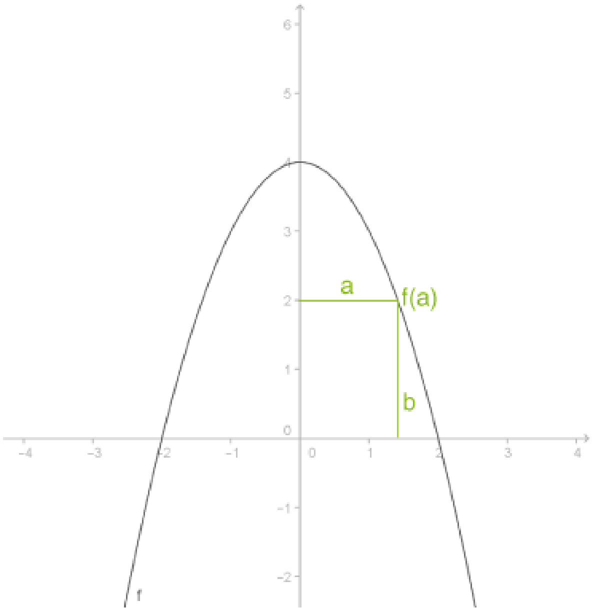
Gehe folgendermaßen vor:

- Fertige eine **Skizze** an.
- Suche die **Größe**, die **minimal** bzw. **maximal** werden soll. Das ist hier der Flächeninhalt, schreibe die geometrische Formel dieser Fläche auf.
- Stelle die **Nebenbedingung** auf. Überlege dir wie die Variablen der gesuchten Größe zusammenhängen.
  Falls ein entscheidender Punkt im Koordinatensystem auf dem Graphen liegt, schreibe ihn mit Hilfe des Funktionsterms des Graphen.
- Bilde nun die **Zielfunktion**, indem du die Nebenbedingung nach einer der Variablen auflöst und in den Term für die extremale Größe einsetzt. Vereinfache diesen Term so weit wie möglich und bestimme den Definitionsbereich der Zielfunktion.
- Bestimme die **absoluten Extremstellen** der Zielfunktion. Vergiss dabei nicht, zu überprüfen, ob diese Kandidaten auch relative Extremstellen sind. Außerdem muss überprüft werden, ob an den Randstellen des Definitionsbereichs noch kleinere/größere Werte für die extremale Größe auftreten.
- Stelle nun die Verbindung zur Aufgabenstellung her, indem du die zweite Variable und den Extremwert berechnest.

Beispiel mit Lösungsskizze

Gegeben ist die Funktion $f(x)=-x^2+4$. Das Schaubild der Funktion f schließt mit den Koordinatenachsen eine Fläche ein. In dieser Fläche soll ein Rechteck mit maximalem Flächeninhalt konstruiert werden. Das Rechteck liegt mit einer Kante auf der x–Achse, mit einer anderen auf der y–Achse.

- **Skizze**



- **Größe**, die **maximal** werden soll:

  $A = a \cdot b$

- **Nebenbedingung**:

  $b = f(a) = -a^2 + 4$

- **Zielfunktion**:

  $A(a) = a \cdot f(a)$=$a \cdot (-a^2 + 4)$=$-a^3 + 4a$ mit Definitionsbereich $\mathbb{D} = [0, 2]$.

- Bestimme die **absoluten Extremstellen** der Zielfunktion.

  $A(a) = -a^3 + 4a$
  $A'(a) = -3a^2 + 4$
  $A''(a) = -6a$

$$\begin{array}{rcl} A'(a) &=& 0 \\ -3a^2 + 4 &=& 0 \\ -3a^2 &=& -4 \\ a^2 &=& \frac{4}{3} \\ a &=& \pm\dfrac{2}{\sqrt{3}} \end{array}$$

Für diese Aufgabe ist nur $a = \frac{2}{\sqrt{3}}$ interessant, da die andere Lösung nicht im Definitionsbereich liegt.

$A''\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$=$-6\dfrac{2}{\sqrt{3}} < 0$ es handelt sich also um ein Maximum.

Der maximale Wert ist somit: $A\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = 3,08$

Überprüfen der Randstellen:

$$A(0) = 0 < 3,08$$
$$A(2) = 0 < 3,08$$

- Für die Seite b gilt dann: $b{=}-\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 + 4{=}\frac{8}{3} \approx 2,7$.

  Die maximale Fläche beträgt also $3,08$.